www.estalmat.org/madrid

Números de Catalan

Una excusa para trabajar con biyecciones

Luis Hernández Corbato - Estalmat Madrid / Universidad Complutense de Madrid

Contexto

- Una única sesión (~1h 30m) para los alumnos de 2º año.
- Trabajo en grupo: cinco mesas, cada una con cinco alumnos.
- Dos sesiones de combinatoria impartidas también en 2º año: técnicas de conteo básico, permutaciones, variaciones, combinaciones, números combinatorios y triángulo de Pascal.

Objetivo

- Relacionar problemas de conteo de enunciados diferentes pero con las “mismas” soluciones.
- Establecer biyecciones (diccionarios) entre unas soluciones y otras.

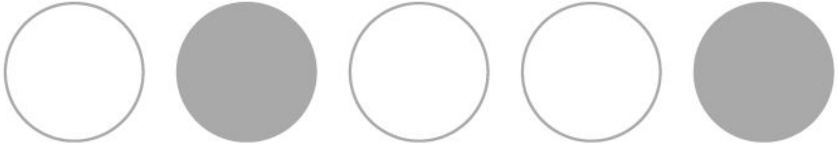
¿Qué no se pretende?

- Hallar explícitamente los resultados.
- Desarrollar técnicas que ayuden en la búsqueda de los resultados.

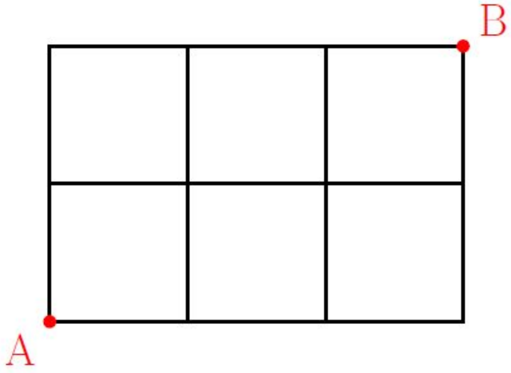
La sesión - Ejemplo inicial

Contando con los dedos de las manos...

1. ¿De cuántas formas se pueden poner en fila tres canicas blancas y dos grises?

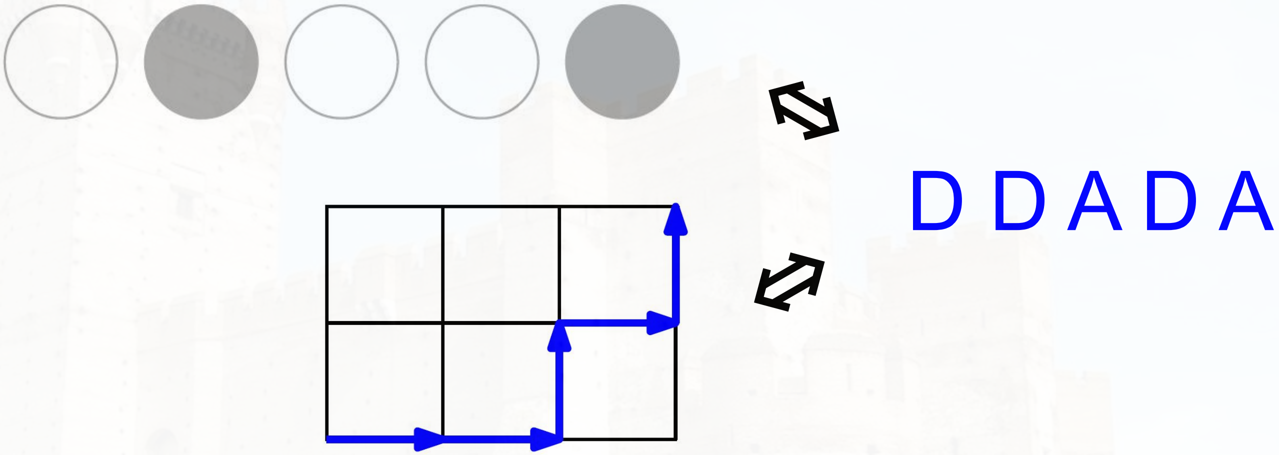


2. ¿Cuántos caminos van de A a B sin retroceder?



¿Son iguales los resultados de ambos ejercicios? ¿Por qué?

Aparecen los primeros "diccionarios":



Y la definición formal:

Una **biyección** es una correspondencia entre dos conjuntos que a cada elemento de un conjunto asocia uno y solo uno del otro conjunto.

Decimos que dos conjuntos tienen el mismo **cardinal** si puedo construir una biyección entre ambos.

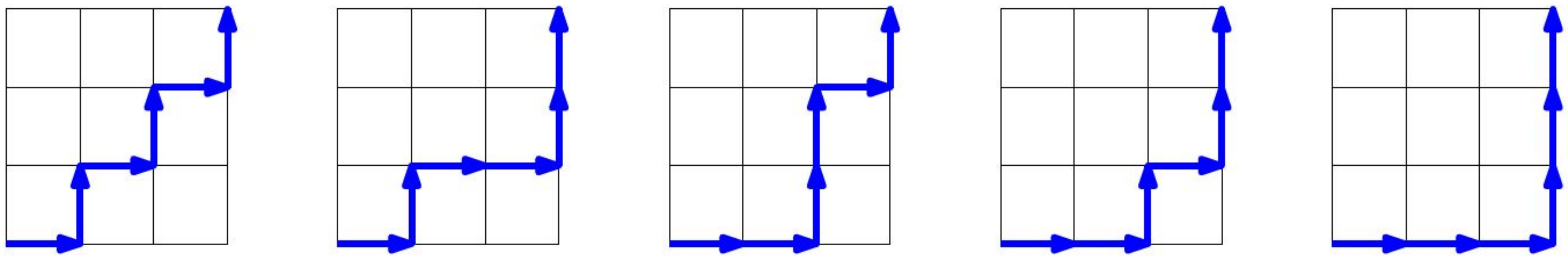
Los números de Catalan (paréntesis teórico)

C_n es el número de expresiones “correctas” formadas por n pares de paréntesis:

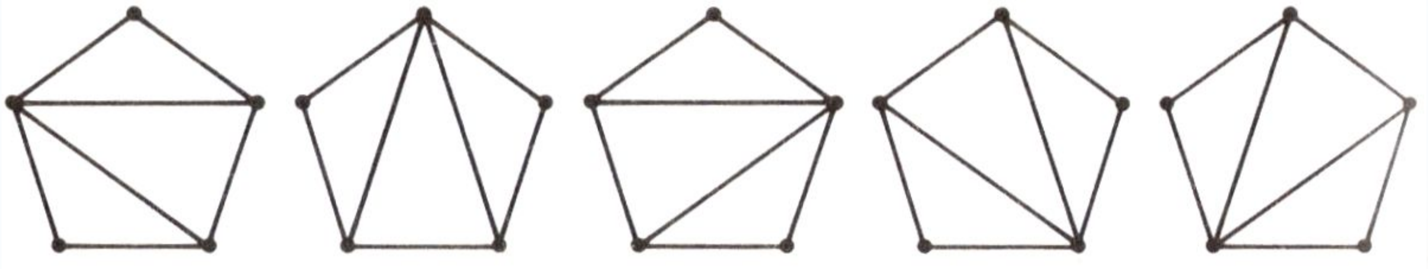
( ) ( ) ( ) , ( ) (( )) , (( )) ( ) , (( ) ( )) , ((( )))

Eugène Charles Catalan
(1814 - 1894)

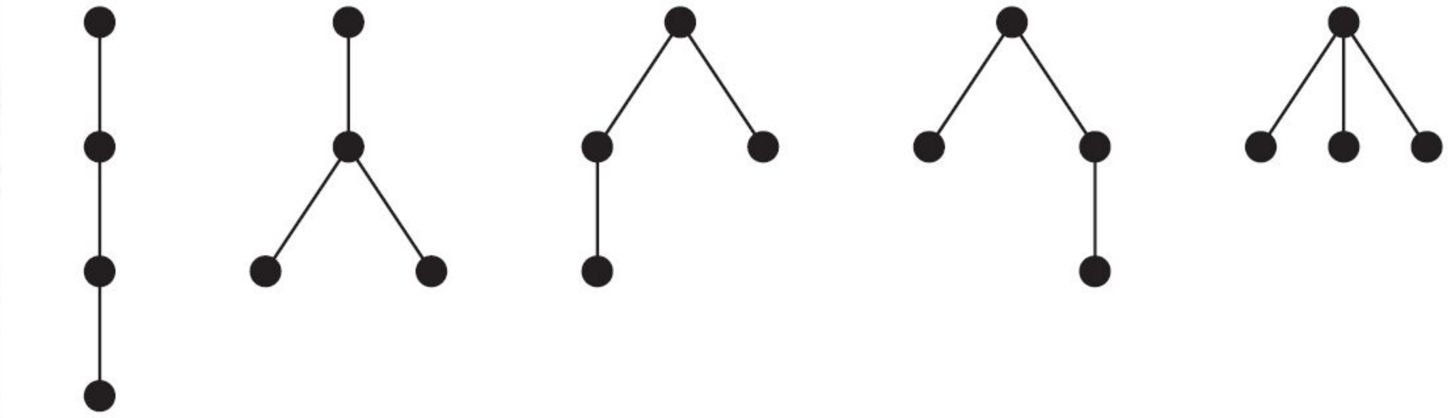
C_n es el número de caminos de un vértice a su opuesto por la retícula que no sobrepasan la diagonal en un cuadrado de lado n:



C_n es el número de triangulaciones del polígono regular de n+2 lados



C_n es el número de árboles (grafos) planares con n+1 vértices



Valores de los números de Catalan: 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, …

Fórmula de recurrencia: (se toma $C_0 = 1$)

$$C_{n+1} = C_0 \cdot C_n + C_1 \cdot C_{n-1} + \cdots + C_{n-1} \cdot C_1 + C_n \cdot C_0$$

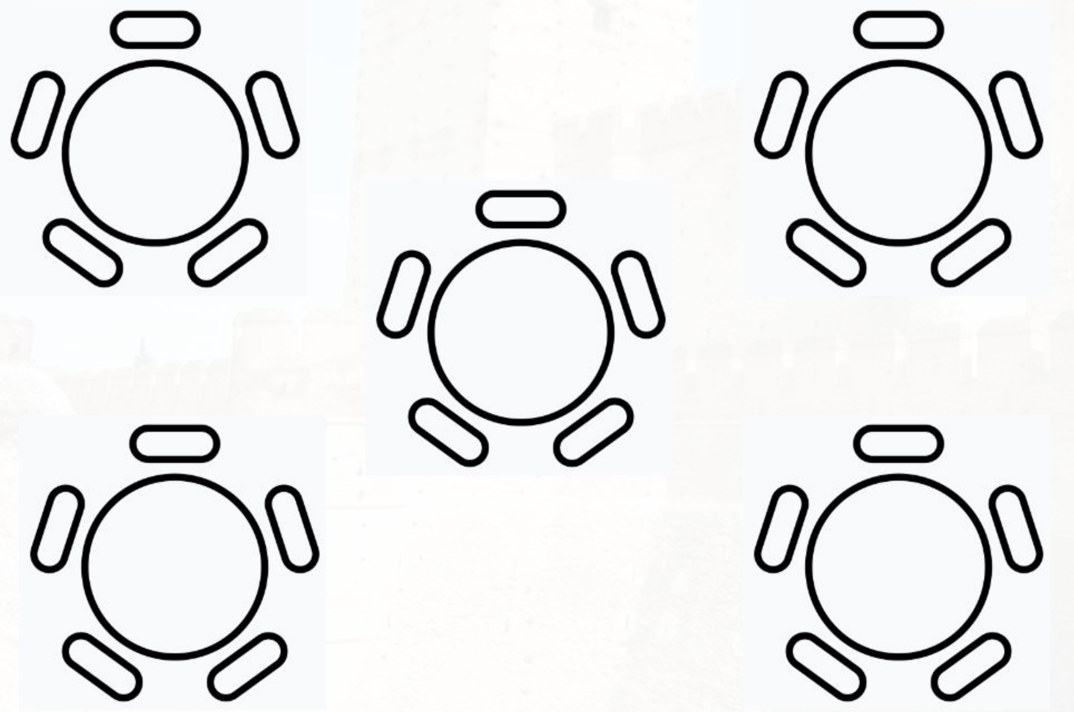
o también,

$$C_{n+1} = C_n \cdot \frac{2(2n+1)}{n+2}$$

Fórmula cerrada:

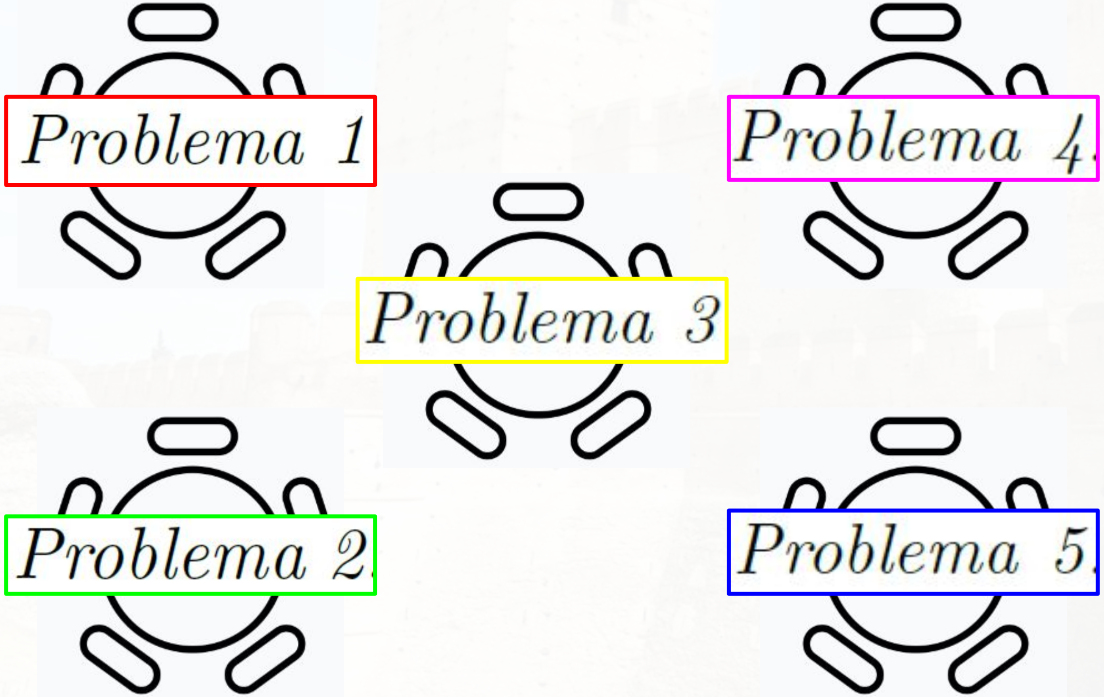
$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

La sesión - Actividad principal



- Se eligen cinco definiciones de los números de Catalan

La sesión - Actividad principal



- Se eligen cinco definiciones de los números de Catalan

- Se disfrazan como problema y se reparten, cada uno a una mesa

- Cada mesa trabaja primero en su problema y luego se les anima a establecer diccionarios con las demás

Problema 1: Te dan n papeletas con el número 1 y n papeletas con el número -1. Tienes que colocarlas en orden de tal manera que la primera papeleta es mayor o igual que 0, que la suma de las dos primeras papeletas es mayor o igual que 0, que la suma de las 3 primeras papeletas es también mayor o igual que 0 y así sucesivamente. ¿De cuántas maneras puedes hacerlo?

+1+1+(-1)+(-1)+1+(-1)

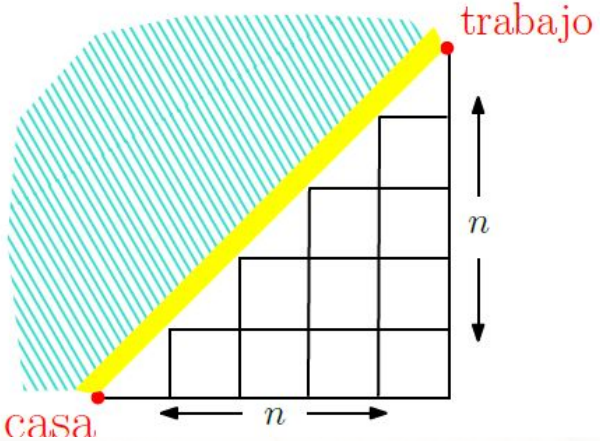
+1+1+(-1)+(-1)+1+(-1) = +1
+1+1+(-1)+(-1)+1+(-1) = +2
+1+1+(-1)+(-1)+1+(-1) = +1
+1+1+(-1)+(-1)+1+(-1) = 0
+1+1+(-1)+(-1)+1+(-1) = +1
+1+1+(-1)+(-1)+1+(-1) = 0

Problema 1: Te dan n papeletas con el número 1 y n papeletas con el número -1. Tienes que colocarlas en orden de tal manera que la primera papeleta es mayor o igual que 0, que la suma de las dos primeras papeletas es mayor o igual que 0, que la suma de las 3 primeras papeletas es también mayor o igual que 0 y así sucesivamente. ¿De cuántas maneras puedes hacerlo?

+1+(-1)+1+(-1)+1+(-1) +1+(-1)+1+1+(-1)+(-1) +1+1+(-1)+(-1)+1+(-1)

+1+1+(-1)+1+(-1)+(-1) +1+1+1+(-1)+(-1)+(-1)

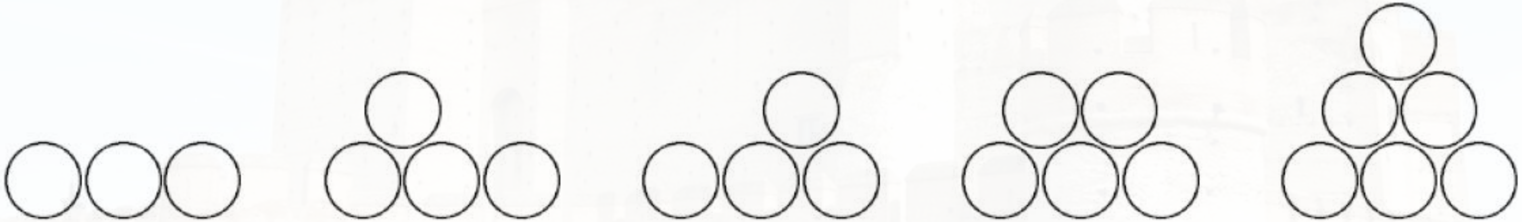
Problema 2: Imagínate que te has mudado a una casa en la playa al ladito del mar. Has tenido mucha suerte porque no sólo tu casa sino también el trabajo está en la costa, como muestra la figura. La pena es que los planes urbanísticos para tu nueva ciudad fueron un absoluto desastre, ¡no hay paseo marítimo para ir directo de casa al trabajo! Como consecuencia, hay muchas maneras distintas de ir de casa al trabajo caminando la distancia mínima. ¿Podrías calcular cuántas?



Problema 3: Calcula el número de secuencias $1 = a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ tales que $a_i \leq i$. Por ejemplo, si $n = 3$, tenemos las siguientes secuencias:

$$111 \quad 112 \quad 113 \quad 122 \quad 123$$

Problema 4: Determina el número de maneras de apilar círculos de forma que la fila de abajo tenga n círculos.



Problema 5: Halla el número de secuencias $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que $a_1 = 0$ y $0 \leq a_{i+1} \leq a_i + 1$. Por ejemplo, si $n = 3$, las secuencias son: $000, 001, 010, 011, 012$.

Desarrollo de la actividad:

- Cada mesa trabaja **de forma independiente** en su problema.
- Enumeran las $C_4 = 14$ soluciones para $n = 4$.
- Se anima a que trabajen unos minutos en el caso $n = 5$ (ojo, $C_5 = 42$).
- Se convierte en un secreto a voces que todos los problemas tienen las mismas soluciones.
- Se les sugiere que piensen el problema de otra mesa y lo relacionen con el suyo:

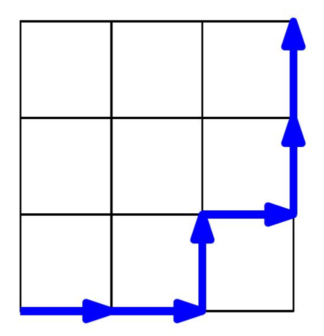
$$1 \Leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \Leftrightarrow 5$$

Codificaciones comunes:

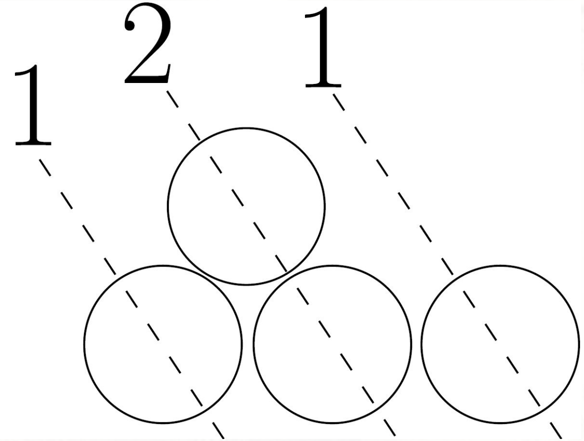
+1+1+(-1)+(-1)+1+(-1)

⇩

+ + – – + +

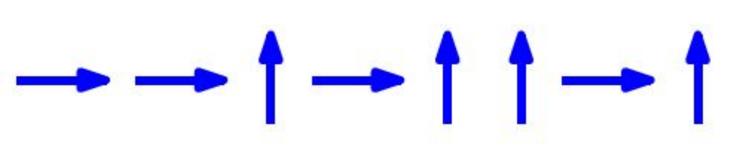


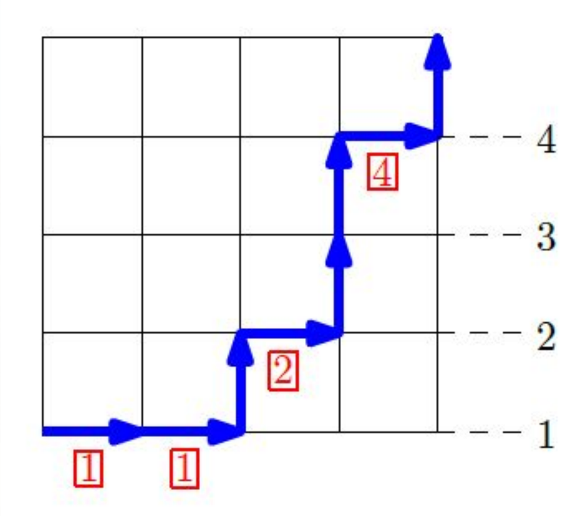
⇨ DDADAA

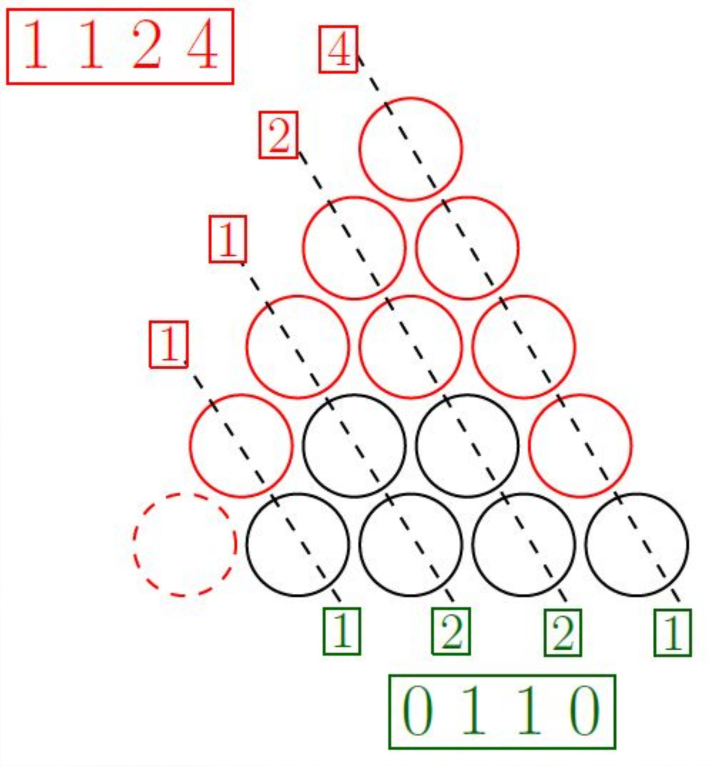


La clase termina explicando los “diccionarios” (biyecciones) entre los cinco problemas a través de ejemplos

+1 +1 +(-1) +1 +(-1)+(-1) +1+ (-1)







Comentarios finales

- Cada mesa trabaja un problema diferente, hay que procurar que no se dispersen y **marcarles un objetivo claro**.
- **La fórmula** de los números de Catalan **es difícil** ⇒ da menos pie a que se entretengan averiguándola.
- La sesión es **independiente** de las sesiones previas sobre combinatoria.
- Es preferible “retener” a los estudiantes para que **trabajen un solo problema** y más tarde comiencen a relacionarlos.
- Aunque es exigente en cuanto a dificultad, típicamente se consiguen relacionar los cinco problemas.

Expansiones de la sesión

- Emplear la definición de los números de Catalan con **triangulaciones** y **árboles binarios** (sencillas) o **con árboles planos** (difícil).
- Introducir las **fórmulas de recurrencia** y deducir la de los números de Catalan.
- Hallar la **fórmula explícita** (prerrequisito: números combinatorios).
- **Función generatriz** (para jubilados!)

¡MUCHAS GRACIAS!

ESTALMAT

ESTALMAT
Comunidad de Madrid